BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC QUY NHƠN

VƯƠNG TRUNG DŨNG

MỘT SỐ HÀM KHOẢNG CÁCH TRONG LÝ THUYẾT THÔNG TIN LƯỢNG TỬ VÀ CÁC VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

NGÀNH:TOÁN GIẢI TÍCH
MÃ NGÀNH: 9 46 01 02

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

BÌNH ĐỊNH - NĂM 2024

Công trình được hoàn thành tại:
Trường Đại học Quy Nhơn

Tập thể hướng dẫn:
PGS.TS. Lê Công Trình
PGS.TS. Đinh Trung Hòa

Phản biện 1: GS.TS. Đặng Đức Trọng

Phản biện 2: GS.TS. Phạm Tiến Sơn

Phản biện 3: PGS.TS. Phạm Quý Mười

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng đánh giá luận án tại
Trường Đại học Quy Nhơn vào lúc .... giờ .... ngày .... tháng .... năm 2024

Có thể tìm hiểu luận án tại:
-Thư viện Quốc gia Việt Nam
-Trung tâm thông tin tư liệu Trường Đại học Quy Nhơn

Lời cam đoan

Luận án này được hoàn thành tại Trường Đại học Quy Nhơn dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Lê Công Trình và PGS.TS. Đinh Trung Hòa. Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các kết quả trong Luận án là trung thực, được các đồng tác giả cho phép sử dụng và chưa từng được ai công bố trước đó.

Tác giả

Vương Trung Dũng

Lời cảm ơn

Luận án này đã được thực hiện trong thời gian tôi làm nghiên cứu sinh tại Khoa Toán và Thống kê trường Đại học Quy Nhơn. Sau khi hoàn thành luận án, tôi chân thành biết ơn đến những người đã đóng góp và giúp đỡ tôi. Nhân dịp này, tôi muốn bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến tất cả mọi người.

Trước tiên và cũng là quan trọng nhất, tôi muốn bày tỏ lòng biết ơn chân thành nhất đến PGS.TS Đinh Trung Hòa - người Thầy hướng dẫn và cũng là người đã đưa tôi đến với Giải tích ma trận. Không những vậy Thầy còn dành rất nhiều thời gian để thảo luận, giảng dạy, chỉ bảo và đưa ra các vấn đề cho tôi giải quyết. Thầy luôn khuyến khích tôi tham gia các hội thảo đồng thời giới thiệu tôi với các chuyên gia hàng đầu trong lĩnh vực này. Thầy đã khơi gợi cho tôi thấy được niềm vui trong nghiên cứu. Đối với tôi, thật khó để tìm được một Thầy hướng dẫn nào tuyệt vời như Thầy Hòa.

Người thứ hai tôi muốn bày tỏ lòng biết ơn là PGS.TS. Lê Công Trình, người đã giảng dạy tôi từ những năm tôi còn là sinh viên đại học, và cũng là người đã giới thiệu tôi cho Thầy Hòa. Từ những năm đầu còn ngồi trên ghế giảng đường đại học, Thầy Trình đã luôn truyền đam mê và động lực học Toán cho tôi. May mắn thay bây giờ tôi lại có cơ hội được làm học trò của Thầy một lần nữa. Thầy luôn hỗ trợ nhiệt tình cho tôi không những trong Toán học, trong công việc mà còn cả trong cuộc sống. Nếu không có sự hỗ trợ tận tình đó, rất khó để tôi có thể hoàn thành luận án này.

Tôi muốn bày tỏ lòng biết ơn đặc biệt đến những giảng viên khoa Toán-Thống kê và Phòng đào tạo sau Đại học trường Đại học Quy Nhơn. Các Thầy Cô đã dạy dỗ và tạo những điều kiện tốt nhất cho các nghiên cứu sinh giống như tôi. Bình Định là quê hương tôi, cũng là nơi mà tôi trải qua cả quãng đời phổ thông lẫn đại học. Việc trở lại mái trường Đại học Quy Nhơn một lần nữa để hoàn thành sự nghiệp học tập của mình là một niềm hạnh phúc lớn lao của bản thân tôi.

Tôi gửi lời cảm ơn đến Ban giám hiệu cùng các đồng nghiệp trường Phổ thông Năng khiếu Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh vì đã hỗ trợ tôi hoàn thành việc nghiên cứu sinh. Đặc biệt, tôi muốn gửi lời cảm ơn sâu sắc nhất đến TS. Nguyễn Thanh Hùng, người đã hỗ trợ tôi rất nhiều từ vật chất đến tinh thần ngay từ những ngày đầu tôi đặt chân đến Sài Gòn. Thầy không chỉ là một người Thầy mà còn là người cha thứ hai đối với tôi. Thầy không những hỗ trợ tài chính, tinh thần cho tôi vào những thời điểm tôi gặp khó khăn mà còn luôn động viên tôi học tiếp lên tiến sĩ. Nếu không có sự động viên lớn lao này, tôi sẽ không đạt được những kết quả như hiện tại.

Anh muốn gửi lời cảm ơn và những lời chúc tốt đẹp nhất đến Su vì khoảng thời gian ta bên nhau. Đó là nguồn động lực giúp anh vượt qua khó khăn trong con đường học tập và hướng về những điều lớn lao hơn về sau này.

Cuối cùng, và quan trọng nhất, tôi muốn bày tỏ lòng biết ơn đến gia đình của mình. Gia đình luôn bên cạnh tôi trong công việc, học tập và cuộc sống. Tôi muốn cảm ơn Ba Mẹ đã sinh ra tôi

và nuôi dưỡng tôi đến khi trưởng thành. Luận văn này là một món quà tôi dành tặng cho Ba Mẹ thân yêu.

MỤC LỤC

Giới thiệu 1

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị 6

1.1. Những kiến thức cơ bản của lý thuyết ma trận 6

1.2. Hàm ma trận và trung bình ma trận 8

Chương 2. Khoảng cách Hellinger có trọng 11

2.1. Khoảng cách Hellinger có trọng 12

2.2. Tính chất điểm giữa 12

Chương 3. Phân kỳ α-z-Bures Wasserstein 14

3.1. Phân kỳ α-z-Bures Wasserstein và bài toán tổng bình phương bé nhất 15

3.2. Bất đẳng thức xử lý dữ liệu và tính chất điểm giữa 17

3.3. Độ chính xác lượng tử và các phiên bản tham số hóa 17

3.4. Độ chính xác α-z giữa các quỹ đạo unita 18

Chương 4. Một dạng trung bình nhân dạng phổ có trọng số mới 19

4.1. Một dạng trung bình nhân dạng phổ có trọng số mới và các tính chất cơ bản 19

4.2. Công thức Lie-Trotter và tính làm trội yếu-log 20

Kết luận 21

Những nghiên cứu tiếp theo 22

Danh mục công trình liên quan đến luận án 23

Tài liệu tham khảo 24

Mở đầu

Lý thuyết thông tin lượng tử là ngành khoa học giao thoa giữa cơ học lượng tử và lý thuyết thông tin, kiến thức toán học được sử dụng trong cả hai lĩnh vực để khám phá bản chất sâu sắc của việc xử lý thông tin ở mức độ lượng tử. Trong lý thuyết thông tin cổ điển, bit là đơn vị cơ bản biểu thị bởi 0 và 1. Ngược lại, lý thuyết thông tin lượng tử giới thiệu khái niệm qubit, là phiên bản lượng tử của bit cổ điển. Khác với bit cổ điển, qubit có thể tồn tại trong một trạng thái chồng chất, cho phép chúng tồn tại cùng một lúc ở cả 0 và 1. Đặc tính độc đáo này giúp máy tính lượng tử thực hiện một số tính toán cụ thể nhanh gấp nhiều lần so với máy tính cổ điển.

Rối lượng tử là một khái niệm quan trọng trong lý thuyết lượng tử, mô tả trạng thái trong đó hai hoặc nhiều hạt trở nên liên kết chặt chẽ. Khi các hạt này bị rối, việc thay đổi trạng thái của một hạt sẽ ngay lập tức ảnh hưởng đến trạng thái của hạt khác mà không phụ thuộc vào khoảng cách của chúng. Điều này mang lại những ý nghĩa quan trọng trong lĩnh vực của thông tin lượng tử và máy tính lượng tử, mở ra những cách tiếp cận mới trong việc xử lý thông tin.

Các thuật toán lượng tử, như thuật toán Shor để phân tích số lớn và thuật toán Grover để tìm kiếm lượng tử, là minh chứng cho sức mạnh của thông tin lượng tử trong việc giải quyết các vấn đề tính toán phức tạp một cách hiệu quả cao.

Để nghiên cứu quá trình xử lý thông tin trong các hệ lượng tử, việc toán học hóa các khái niệm cơ bản như hệ lượng tử, trạng thái lượng tử hay phép đo... là cần thiết. Các công cụ hữu ích dùng để nghiên cứu lý thuyết thông tin lượng tử là giải tích hàm và lý thuyết ma trận. Trước tiên, một hệ lượng tử được mô tả bởi một không gian Hilbert $\mathcal{H}$, được gọi là *không gian biểu diễn*. Lợi ích của điều này không chỉ nằm ở việc đây là tiên đề của cơ học lượng tử mà nó còn giúp ta giới thiệu các ký hiệu được sử dụng trong cơ học lượng tử. *Trạng thái vật lý (thuần khiết)* của một hệ lượng tử được biểu diễn bởi một vector đơn vị trong không gian Hilbert. Đây không phải là tương ứng 1-1. Với các vector đơn vị f_1 và f_2, các trạng thái vật lý tương ứng được xem là như nhau nếu $f_1 = zf_2$, trong đó z là một số phức có độ lớn bằng 1. Số phức z được gọi là một *pha*. Như vậy trạng thái vật lý thuần khiết của một hệ lượng tử được xác định bởi các vector sai khác nhau một pha. Cơ học lượng tử truyền thống phân biệt các trạng thái vật lý thuần khiết và *trạng thái hỗn hợp*. Các trạng thái hỗn hợp được mô tả bởi các *ma trận mật độ*. Một ma trận mật độ hay còn gọi là một toán tử thống kê là một ma trận xác định dương và có vết bằng 1.

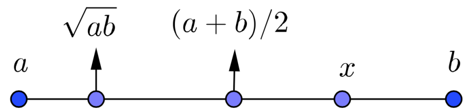
Trong lý thuyết thông tin lượng tử, các hàm khoảng cách được dùng để đo khoảng cách giữa hai trạng thái hỗn hợp. Hơn nữa, các hàm khoảng cách này có thể được sử dụng để mô tả các đặc tính của một trạng thái lượng tử đã cho. Chẳng hạn, chúng dùng để đo rối lượng tử giữa hai phần của một trạng thái, là khoảng cách ngắn nhất giữa trạng thái và tập tất cả các trạng thái tách được. Những hàm khoảng cách này được mở rộng một cách tự nhiên lên tập các ma trận nửa xác định dương, đây cũng là đối tượng chính của luận án này.

Ngày nay, tầm quan trọng của lý thuyết ma trận đã được ghi nhận rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau bao gồm kỹ thuật, xác suất thống kê, thông tin lượng tử, giải tích số, sinh học hay cả các ngành khoa học xã hội. Trong xử lý ảnh, hình ảnh y học (MRI), xử lý tín hiệu radar, sinh học thống kê và học máy, xử lý dữ liệu từ nhiều thí nghiệm được lưu trữ dưới dạng ma trận xác định dương. Để làm việc với mỗi bộ dữ liệu, chúng ta cần chọn phần tử đại diện của nó. Nói cách khác, chúng ta cần tính trung bình của các ma trận xác định dương tương ứng. Do đó, việc xem xét nghiệm toàn cục của bài toán tổng bình phương bé nhất cho ma trận là vô cùng quan trọng (xem [2, 8, 18, 28, 67, 73] để biết ví dụ).

Với $0 < a \le x \le b$. Xét bài toán tổng bình phương bé nhất:

$$d^2(x,a) + d^2(x,b) \to \min, \quad x \in [a,b],$$

trong đó $d := d_E(x,y) = |y-x|$, or, $d := d_R(x,y) := |\log(y) - \log(x)|$.



Trung bình cộng $(a+b)/2$ và trung bình nhân là các nghiệm của bài toán trên tương ứng với các khoảng cách d_E và d_R. Mặt khác, theo bất đẳng thức *AM-GM*, với hai số không âm a và b ta có khoảng cách mới được xác định như sau

$$d(a,b) = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}.$$

Với $A, B \in \mathbb{P}_n$, một vài phiên bản khoảng cách trên dành cho các ma trận xác định dương là

- Khoảng cách Euclide cảm sinh từ tích vô hướng Euclide/Frobenius $\langle A, B\rangle = \operatorname{Tr}(A^*B)$. Chuẩn tương ứng là $\|A\|_F = \langle A, A\rangle^{1/2} = (\operatorname{Tr}(A^*A))^{1/2}$.
- Khoảng cách Riemann [12] $\delta_R(A,B) = ||\log(A^{-1}B)||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \log^2 \lambda_i(A^{-1}B)\right)^{1/2}$.
- Khoảng cách Bures-Wasserstein [13] trong lý thuyết tối ưu vận tải :

$$d_b(A,B) = \left(\operatorname{Tr}(A+B) - 2\operatorname{Tr}\left(\left(A^{1/2}BA^{1/2}\right)^{1/2}\right)\right)^{1/2}.$$

- Khoảng cách Log-Determinant trong học máy và lý thuyết thông tin lượng tử [75]:

$$d_l(A,B) = \log\det\frac{A+B}{2} - 2\log\det(AB).$$

- Khoảng cách Hellinger hay còn gọi là khoảng cách Bhattacharya [73] trong lý thuyết thông tin lượng tử :

$$d_h(A,B) = \left(\operatorname{Tr}(A+B) - 2\operatorname{Tr}\left(A^{1/2}B^{1/2}\right)\right)^{1/2}.$$

Trong các lĩnh vực ứng dụng, người ta còn quan tâm đến các hàm tựa khoảng cách dùng để "phân biệt" được hai điểm dữ liệu. Các hàm như vậy không nhất thiết phải có tính chất đối xứng hay là thỏa mãn bất đẳng thức tam giác. Các *phân kỳ* [11] là những hàm có tính chất như vậy.

Định nghĩa. Một hàm trơn $\Phi : \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n \to \mathbb{R}^+$ được gọi là *phân kỳ lượng tử* nếu

(i) $\Phi(A, B) = 0$ nếu và chỉ nếu $A = B$.

(ii) Đạo hàm cấp một $D\Phi$ theo biến thứ hai triệt tiêu trên đường chéo, tức là

$$D\Phi(A, X)|_{X=A} = 0.$$

(iii) Đạo hàm cấp hai $D^2\Phi$ không âm trên đường chéo, tức là

$$D^2\Phi(A, X)|_{X=A}(Y, Y) \geq 0 \quad \text{với mọi ma trận Hermitian } Y.$$

Một số phân kỳ lượng tử gần đây nhận được nhiều sự quan tâm của các nhà toán học có thể xem trong các tài liệu [11, 14, 35, 56].

Bây giờ chúng ta nhắc lại một số lý thuyết về trung bình vô hướng, nó là khởi đầu cho các vấn đề tiếp theo trong luận án này. Một *trung bình vô hướng* của các số thực không âm là một hàm $M : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

1) $M(x, x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$.

2) $M(x, y) = M(y, x)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}^+$.

3) Nếu $x < y$, thì $x < M(x, y) < y$.

4) Nếu $x < x_0$ và $y < y_0$, thì $M(x, y) < M(x_0, y_0)$.

5) $M(x, y)$ liên tục.

6) $M(tx, ty) = tM(x, y)$ với $t, x, y \in \mathbb{R}^+$.

Hàm hai biến $M(x, y)$ thỏa điều kiện 6) có thể được rút gọn thành hàm một biến $f(x) := M(1, x)$. Tức là, $M(x, y)$ được khôi phục từ f bằng cách $M(x, y) = xf(x^{-1}y)$. Để ý là hàm f tương ứng với M là một hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^+$. Sự liên hệ này cho một tương ứng một-một giữa các trung bình và các hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}^+$.

Sau đây là một số tính chất mong muốn của một đại lượng được gọi là trung bình M trên $\mathbb{H}_n^+$.

(A1). Dương: $A, B \geqslant 0 \Rightarrow M(A, B) \geqslant 0$.

(A2). Đơn điệu: $A \geqslant A', B \geqslant B' \Rightarrow M(A, B) \geqslant M(A', B')$.

(A3). Thuần nhất dương: $M(kA, kB) = kM(A, B)$ for $k \in \mathbb{R}^+$.

(A4). Bất dẳng thức biến thế: $X^*M(A,B)X \leqslant M\left(X^*AX, X^*BX\right)$ với $X \in B(\mathcal{H})$.

(A5). Bất biến đồng dạng: $X^*M(A,B)X = M\left(X^*AX, X^*BX\right)$ với mọi $X \in B(\mathcal{H})$ và khả nghịch

(A6). Lõm: $M\left(tA+(1-t)B, tA'+(1-t)B'\right) \geqslant tM\left(A,A'\right)+(1-t)M\left(B,B'\right)$ với $t \in [0,1]$.

(A7). Liên tục dưới: nếu $A_n \downarrow A$ và $B_n \downarrow B$, thì $M\left(A_n, B_n\right) \downarrow M(A,B)$.

(A8). Điểm giữa: nếu $A \leqslant B$, thì $A \leqslant M(A,B) \leqslant B$.

(A9). Cố định: $M(A,A) = A$.

Để nghiên cứu trung bình toán tử trong trường hợp tổng quát, ta phải xem xét ba loại trung bình cổ điển là trung bình cộng, trung bình nhân và trung bình điều hòa. Ba loại trung bình này được định nghĩa thứ tự như sau

$$A\nabla B = \frac{1}{2}(A+B),$$

$$A\sharp B = A^{1/2}\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)^{1/2}A^{1/2},$$

và

$$A!B = 2(A^{-1}+B^{-1})^{-1}.$$

Trong định nghĩa trên, nếu ma trận A không khả nghịch, ta thay A bởi $A_\epsilon = A+\epsilon I$ và cho ϵ tiến dần tới 0 (tương tự cho ma trận B). Có thể thấy rằng trung bình cộng, trung bình nhân và trung bình điều hòa có cùng các tính chất từ (A1)-(A9). Vào năm 1980, Kubo và Ando [54] phát triển về lý thuyết trung bình toán tử trên $\mathbb{H}_n^+$. Đầu tiên, họ định nghĩa *phép nối tiếp* giữa hai ma trận như sau (thuật ngữ “phép nối tiếp” xuất phát từ việc nghiên cứu mạng lưới điện được mắc nối tiếp).

Định nghĩa. Một phép nối tiếp trên $\mathbb{H}_n^+$ là một toán tử hai ngôi σ trên $\mathbb{H}_n^+$ thỏa mãn hệ các tiên đề sau với mọi $A, A', B, B', C \in \mathbb{H}_n^+$:

(M1). Đơn điệu: $A \leqslant A', B \leqslant B' \Longrightarrow A\sigma B \leqslant A'\sigma B'$.

(M2). Bất đẳng thức biến thế: $C(A\sigma B)C \leqslant (CAC)\sigma(CBC)$.

(M3). Liên tục đều-dưới: if $A_n, B_n \in B(\mathcal{H})^+$satisfy $A_n \downarrow A$ and $B_n \downarrow B$, then $A_n\sigma B_n \downarrow A\sigma B$.

Với mỗi phép nối tiếp σ, *chuyển vị* của σ, σ' được định nghĩa bởi $A\sigma'B = B\sigma A$. Phép nối tiếp σ được gọi là *đối xứng* nếu $\sigma = \sigma'$. *Liên hợp* của σ, ký hiệu là σ^*, được định nghĩa bởi $A\sigma^*B = \left(A^{-1}\sigma B^{-1}\right)^{-1}$, trong đó A, B khả nghịch. Khi σ là phép nối tiếp khác không, *đối ngẫu* của σ, ký hiệu là $\sigma^\perp$, được định nghĩa bởi $\sigma^\perp = (\sigma')^* = (\sigma^*)'$.

Tuy nhiên, lý thuyết trung bình Kubo-Ando vẫn còn nhiều hạn chế. Trong các ngành ứng dụng và kĩ thuật, người ta cần nhiều hơn những lớp trung bình không phải Kubo-Ando. Về một số lớp trung bình không Kubo-Ando độc giả quan tâm có thể xem trong các tài liệu [17, 23, 25, 35, 37].

Một trong những lớp trung bình không phải Kubo-Ando quan trọng là trung bình nhân dạng phổ, ký hiệu bởi $A\natural B$, được giới thiệu vào năm 1997 bởi Fiedler và Pták [37]. Đại lượng này được gọi là trung bình nhân dạng phổ bởi vì $(A\sharp B)^2$ đồng dạng với AB, đồng thời các giá trị riêng của nó chính là căn bậc hai của các giá trị riêng tương ứng của AB. Vào năm 2015, Kim và Lee [52] định nghĩa trung bình nhân dạng phổ có trọng như sau:

$$A\natural_t B := \left(A^{-1}\sharp B\right)^t A \left(A^{-1}\sharp B\right)^t, \quad t \in [0,1].$$

Trong luận án này chúng tôi tập trung vào hai vấn đề chính sau:

1. **Hàm khoảng cách sinh ra từ các trung bình toán tử.** Chúng tôi giới thiệu một số khoảng cách mới trên tập hợp các ma trận xác định dương liên quan đến trung bình toán tử và các ứng dụng của chúng. Ngoài ra, chúng tôi cũng nghiên cứu một số tính chất hình học của các giá trị trung bình như tính chất "điểm giữa", bất đẳng thức xử lý dữ liệu trong lĩnh vực thông tin lượng tử.

2. **Một trung bình nhân dạng phổ có trọng số mới.** Chúng tôi giới thiệu một dạng trung bình nhân dạng phổ có trọng mới, ký hiệu là $\mathcal{F}_t(A,B)$, và nghiên cứu các tính chất cơ bản của đại lượng này. Ngoài ra chúng tôi cũng thiết lập một số bất đẳng thức về làm trội yếu-log liên quan đến $\mathcal{F}_t(A,B)$ và công thức Lie-Trotter cho $\mathcal{F}_t(A,B)$.

Các công cụ chính trong nghiên cứu của chúng tôi là định lý phổ cho ma trận Hermitian và lý thuyết về trung bình Kubo-Ando. Một số kỹ thuật cơ bản trong lý thuyết về hàm đơn điệu toán tử và hàm lồi toán tử cũng được sử dụng trong luận án. Chúng tôi cũng sử dụng kiến thức cơ bản trong lý thuyết ma trận liên quan đến các chuẩn bất biến unita, vết, v.v.

Kết quả chính của luận án được trích từ các bài báo:

1. Vuong T.D., Vo B.K (2020), "An inequality for quantum fidelity", *Quy Nhon Univ. J. Sci.*, 4 (3).

2. Dinh T.H., Le C.T., Vo B.K, Vuong T.D. (2021), "Weighted Hellinger distance and in betweenness property", *Math. Ine. Appls.,* 24, 157-165.

3. Dinh T.H., Le C.T., Vo B.K., Vuong T.D. (2021), "The α-z-Bures Wasserstein divergence", *Linear Algebra Appl.,* 624, 267-280.

4. Dinh T.H., Le C.T., Vuong T.D., α-z-fidelity and α-z-weighted right mean, *Submitted.*

5. Dinh T.H., Tam T.Y., Vuong T.D, On new weighted spectral geometric mean, *Submitted.*

Các kết quả này cũng đã được trình bày tại khoa Toán và Thống kê, trường Đại học Quy Nhơn cũng như tại các hội thảo trong nước và quốc tế sau:

1. First SIBAU-NU Workshop on Matrix Analysis and Linear Algebra, 15-17 October, 2021.
2. 20th Workshop on Optimization and Scientific Computing, April 21-23, 2022 - Ba Vi, Vietnam.
3. International Workshop on Matrix Analysis and Its Applications, June 4, 2022, Quy Nhon, Viet Nam.
4. The second international workshop on Matrix Theory and Applications, AKFA University, November, 2022.
5. International Workshop on Matrix Analysis and Its Applications, July 7-8, 2023, Quy Nhon, Viet Nam.
6. 10th Viet Nam Mathematical Congress, August 8-12, 2023, Da Nang, Viet Nam.

Luận án này bao gồm các chương giới thiệu, kiến thức chuẩn bị, ba chương chính, kết luận, các hướng nghiên cứu về sau, các bài báo liên quan đến luận án và cuối cùng là tài liệu tham khảo.

Trong phần giới thiệu chúng tôi đưa ra kiến thức nền để tiếp cận luận án đồng thời giải tích tại sao các vấn đề trong luận án là có ý nghĩa và quan trọng. Ngoài ta chúng tôi cũng tóm tắt nội dung luận án thông qua việc nhấn mạnh các kết quả từ ba chương chính.

Chương 1

Một số kết quả chuẩn bị

1.1 Những kiến thức cơ bản của lý thuyết ma trận

Gọi $\mathbb{N}$ là tập tất cả các số tự nhiên. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta ký hiệu $\mathbb{M}_n$ là tập tất cả các ma trận phức cấp $n \times n$, $\mathbb{H}_n$ là tập tất cả các ma trận Hermitian cấp $n \times n$, $\mathbb{H}_n^+$ là tập các ma trận nửa xác định dương cấp $n \times n$, $\mathbb{P}_n$ là tập các ma trận xác định dương cấp $n \times n$ trên $\mathbb{M}_n$, và $\mathcal{D}_n$ là tập các ma trận mật độ, tức là các ma trận xác định dương và có vết bằng 1. Ký hiệu I và O mà các ma trận đơn vị và ma trận không trên $\mathbb{M}_n$, tương ứng. Luận án giải quyết các vấn đề trên ma trận, tức là các toán tử trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$ hữu hạn chiều. Chúng tôi sẽ nhấn mạnh trong trường hợp không gian vô hạn chiều, nếu cần thiết.

Nhắc lại rằng với hai vector $x = (x_j), y = (y_j) \in \mathbb{C}^n$, tích vô hướng $\langle x, y\rangle$ của x và y được định nghĩa là $\langle x, y\rangle \equiv \sum_j x_j \bar{y}_j$. Với $A \in \mathbb{M}_n$, ma trận chuyển vị liên hợp A^* của A là ma trận liên hợp của ma trận chuyển vị A^T. Ta có, $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$.

Định nghĩa 1.1.1. Ma trận $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{M}_n$ được gọi là :

(i) chéo, nếu $a_{ij} = 0$ khi $i \neq j$.

(ii) khả nghịch, nếu tồn tại ma trận B cấp $n \times n$ sao cho $AB = I_n$. Trong trường hợp này A có duy nhất một ma trận nghịch đảo, ký hiệu là $A^{-1} \in \mathbb{M}_n$ sao cho $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$.

(iii) chuẩn tắc, nếu $AA^* = A^*A$.

(iv) unita nếu, $AA^* = A^*A = I_n$.

(v) Hermitian, nếu $A = A^*$.

(vi) nửa xác định dương, nếu $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{C}^n$.

(vii) xác định dương, nếu $\langle Ax, x\rangle > 0$ với mọi $x \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$.

Định nghĩa 1.1.2 (Thứ tự Lowner [86])**.** Với $A, B \in \mathbb{H}_n$. Ta nói $A \geq B$ nếu và chỉ nếu $A - B$ là mà trận nửa xác định dương.

Với $A \in \mathbb{M}_n$, ta ký hiệu các giá trị riêng của A bởi $\lambda_j(A)$, với $j = 1, 2, ..., n$. Ký hiệu $\lambda(A) \equiv (\lambda_1(A), \lambda_2(A), \ldots, \lambda_n(A))$ nghĩa là $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \ldots \geq \lambda_n(A)$.

Modun của ma trận $A \in \mathbb{M}_n$ là căn bậc hai của ma trận A^*A và được ký hiệu là

$$|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}.$$

Ta gọi các giá trị riêng của ma trận $|A|$ là *các giá trị kỳ dị* của A và ký hiệu là $s_j(A)$, với $j = 1, 2, ..., n$. Ký hiệu $s(A) \equiv (s_1(A), s_2(A), \ldots, s_n(A))$ nghĩa là $s_1(A) \geq s_2(A) \geq \ldots \geq s_n(A)$.

Vết của ma trận $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n$, ký hiệu là $\mathrm{Tr}(A)$, là tổng các phần tử trên đường chéo chính hay chính là tổng các giá trị riêng $\lambda_i(A)$ của A, tức là,

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A)$$

Liên quan đến vết của ma trận, chúng tôi nhắc lại bất đẳng thức Araki-Lieb-Thirring [18], được dùng xuyên suốt trong luận án này.

Định lý 1.1.1. *Cho A và B là hai ma trận nửa xác định dương, với $q > 0$, ta có*

$$\mathrm{Tr}\left[\left(B^{\frac{r}{2}} A^r B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{q}{r}}\right] \leq \mathrm{Tr}\left[\left(B^{\frac{1}{2}} A B^{\frac{1}{2}}\right)^{q}\right], \ \textit{if } r \in (0, 1],$$

và

$$\mathrm{Tr}\left[\left(B^{\frac{r}{2}} A^r B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{q}{r}}\right] \geq \mathrm{Tr}\left[\left(B^{\frac{1}{2}} A B^{\frac{1}{2}}\right)^{q}\right], \ \textit{if } r \geq 1.$$

Định thức của ma trận A được định nghĩa và ký hiệu như sau

$$\det(A) = \sum_{\rho \in \mathbb{S}_n} \left(\mathrm{sgn}(\rho) \prod_{i=1}^{n} a_{i\rho_i} \right) = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j.$$

trong đó $\mathbb{S}_n$ là tập tất cả các hoán vị ρ của tập $\mathbb{S} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Hàm $\|\cdot\| : \mathbb{M}_n \to \mathbb{R}$ được gọi là một *chuẩn ma trận* nếu với mọi $A, B \in \mathbb{M}_n$ và $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ ta có:

(i) $\|A\| \geq 0$.

(ii) $\|A\| = 0$ nếu và chỉ nếu $A = 0$.

(iii) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot ||A||$.

(iv) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Ngoài ra, một chuẩn ma trận được gọi là *dưới nhân tính* nếu

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Một chuẩn ma trận được gọi là *bất biến unita* nếu với mỗi $A \in \mathbb{M}_n$, ta có $\|UAV\| = \|A\|$ với mọi $U, V \in \mathbb{U}_n$ là các ma trận unita. Các chuẩn này được ký hiệu là $|||\cdot|||$.

Sau đây là một số chuẩn quan trọng trên $\mathbb{M}_n$.

Chuẩn toán tử của A, được định nghĩa bởi

$$|||A|||_{op} = \sqrt{\lambda_1 (A^*A)} = s_1(A).$$

k-chuẩn Ky Fan là tổng của các giá trị kỳ dị, tức là,

$$\|A\|_k = \sum_{i=1}^{k} s_i(A).$$

p-chuẩn Schatten được định nghĩa bởi

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} s_i^p(A) \right)^{1/p}.$$

Với $p = 2$, ta được chuẩn Frobenius hay còn được gọi là chuẩn Hilbert-Schmidt:

$$\|A\|_2 = \left(\operatorname{Tr} |A|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{n} s_j^2(A) \right)^{1/2}.$$

Với $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ là hai vector trong $\mathbb{R}^n$. Ký hiệu $x^{\downarrow} = \big(x_{[1]}, x_{[2]}, \ldots, x_{[n]}\big)$ nếu các tọa độ của vector x được giảm dần, nghĩa là $x_{[1]} \geqslant x_{[2]} \geqslant \ldots \geqslant x_{[n]}$. Ta nói rằng x *được làm trội* bởi y, ký hiệu là $x \prec y$, nếu

$$\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \leqslant \sum_{i=1}^{k} y_{[i]}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{[i]} = \sum_{i=1}^{n} y_{[i]}.$$

Ta nói x *được làm trội yếu* bởi y nếu $\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \leqslant \sum_{i=1}^{k} y_{[i]}, k = 1, 2, \ldots, n$, ký hiệu là $x \prec_w y$. Nếu $x > 0$ (tức là , $x_i > 0$ với $i = 1, \ldots, n$) và $y > 0$, ta nói x làm trội log-yếu bởi y, ký hiệu là $x \prec_{\log} y$, nếu

$$\prod_{i=1}^{k} x_{[i]} \leqslant \prod_{i=1}^{k} y_{[i]}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1, \quad \text{và} \quad \prod_{i=1}^{n} x_{[i]} = \prod_{i=1}^{n} y_{[i]}.$$

Nói một cách khác, $x \prec_{\log} y$ nếu và chỉ nếu $\log x \prec \log y$.

1.2 Hàm ma trận và trung bình ma trận

Bây giờ chúng ta nhắc lại định lý phổ, đây là một trong những công cụ quan trọng nhất của giải tích hàm và giải tích ma trận.

Định lý 1.2.1 (Phân tích phổ, [9]). *Gọi $\lambda_1 > \lambda_2 \ldots > \lambda_k$ là các giá trị riêng của ma trận Hermitian A. Khi đó*

$$A = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_j,$$

trong đó P_j là các phép chiếu trực giao lên các không gian con sinh bởi các vector sinh bởi các giá trị riêng λ_j.

Với f là một hàm thực xác định trên khoảng $K \subset \mathbb{R}$ và với mọi ma trận Hermitian A với phổ trong K, ma trận $f(A)$ được xác định theo nghĩa của giải tích hàm, nghĩa là,

$$A = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_j \quad \Longrightarrow \quad f(A) := \sum_{j=1}^{k} f(\lambda_j) P_j.$$

Tức là, nếu $A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) U^*$ là phân tích phổ của A (trong đó U là ma trận unita), thì

$$f(A) := U \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \cdots, f(\lambda_n)) U^*.$$

Tiếp theo ta nhắc lại các khái niệm về hàm ma trận/hàm toán tử. Loewner là người đâu tiên nghiên cứu về các hàm toán tử đơn điệu [63] vào năm 1930. Cùng thời gian này, Kraus nghiên cứu các hàm toán tử lồi [55].

Định nghĩa 1.2.1. ([63]) Một hàm liên tục f xác định trên khoảng $K (K \subset \mathbb{R})$ được gọi là hàm *toán tử đơn điệu cấp n* trên K nếu với hai ma trận Hermitian A và B trên $\mathbb{M}_n$ có phổ nằm trong K, ta phải có

$$A \le B \quad \text{kéo theo} \quad f(A) \le f(B).$$

Nếu f là hàm toán tử đơn điệu mọi cấp thì f được gọi là hàm *toán tử đơn điệu.*

Định lý 1.2.2 (Bất đẳng thức Lowner-Heinz, [86]). *Hàm $f(t) = t^r$ là hàm toán tử đơn điệu trên $[0, \infty)$ với $0 \le r \le 1$. Cụ thể hơn, với hai ma trận nửa xác định dương $A \le B$, ta có*

$$A^r \le B^r, \quad 0 \le r \le 1.$$

Định nghĩa 1.2.2. ([55]) Một hàm liên tục f xác định trên khoảng $K (K \subset \mathbb{R})$ được gọi là hàm *toán tử lồi cấp n* trên K nếu với hai ma trận Hermitian A và B trên $\mathbb{M}_n$ có phổ nằm trong K và với mọi $0 \le \lambda \le 1$, ta phải có

$$f(\lambda A + (1 - \lambda)B) \le \lambda f(A) + (1 - \lambda) f(B).$$

Nếu f là hàm toán tử lồi với mọi cấp thì f được gọi là *toán tử lồi.* Nếu $-f$ là toán tử lồi thì ta nói f là *toán tử lõm.*

Định lý 1.2.3. *([10]) Hàm $f(t) = t^r$ trên $[0, \infty)$ là toán tử lồi nếu $r \in [-1, 0] \cup [1, 2]$. Cụ thể hơn, với hai ma trận nửa xác định dương A, B và với mọi $\lambda \in [0, 1]$, ta có*

$$(\lambda A + (1 - \lambda)B)^r \leq \lambda A^r + (1 - \lambda)B^r.$$

Một ví dụ quan trọng khác là hàm $f(t) = \log t$, đây là hàm toán tử đơn điệu trên $(0, \infty)$, còn hàm $g(t) = t \log t$ là hàm toán tử lồi. Mối liên hệ giữa hàm toán tử đơn điệu và hàm toán tử lồi được thể hiện qua định lý sau.

Định lý 1.2.4. *([9]) Cho f là một hàm liên tục trên $[0, \alpha)$. Các điều kiện sau là tương đương:*

(i) f là hàm toán tử lồi và $f(0) \leq 0$.

(ii) Hàm $g(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ là hàm toán tử đơn điệu trên $(0, \alpha)$.

Định nghĩa 1.2.3 ([10])**.** Gọi $f(A, B)$ là hàm ma trận hai biến với giá trị thực. Khi đó, f được gọi là *lõm đồng thời*, nếu với mỗi $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$f(\alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2, \alpha B_1 + (1 - \alpha)B_2) \geq \alpha f(A_1, B_1) + (1 - \alpha)f(A_2, B_2)$$

với mọi A_1, A_2, B_1, B_2. Nếu $-f$ lõm đồng thời, ta nói f là *lồi đồng thời*.

Chúng ta sẽ nhắc sơ lược về đạo hàm Fretchet, cụ thể hơn là đạo hàm của ma trận. Với X, Y là các không gian Banach thực và $\mathcal{L}(X, Y)$ là không gian các toán tử tuyến tính bị chặn từ X vào Y. Cho U là một tập con mở của X. Một ánh xạ liên tục f từ U vào Y được gọi là khả vi tại một điểm u thuộc U nếu tồn tại $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ sao cho

$$\lim_{v \to 0} \frac{\|f(u + v) - f(u) - Tv\|}{\|v\|} = 0.$$

Dễ thấy là sự tồn tại của T (nếu có) là duy nhất. Nếu f khả vi tại u thì toán tử T ở trên được gọi là đạo hàm của f tại u và được ta ký hiệu là $Df(u)$, hoặc là $\partial f(u)$. Ta còn gọi đạo hàm này là đạo hàm Fretchet. Nếu f khả vi tại mọi điểm trên U thì ta nói f khả vi trên U. Ta thấy là, nếu f khả vi tại u thì với mọi $v \in X$

$$Df(u)(v) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(u + tv).$$

Đây còn gọi là đạo hàm của theo hướng của f tại u theo hướng v.

Nếu f_1, f_2 là hai hàm khả vi thì $f_1 + f_2$ cũng khả vi và

$$D\left(f_1 + f_2\right)(u) = Df_1(u) + Df_2(u).$$

Hàm hợp của hai hàm khả vi f và g cũng khả vi và ta có quy tắc đạo hàm của hàm hợp

$$D(g \circ f)(u) = Dg(f(u)) \cdot Df(u).$$

Một quy tắc quan trọng của các hàm thực đó là quy tắc đạo hàm của tích, tức là $(fg)' = f'g + gf'$. Nếu f và g là các hàm nhận giá trị trong không gian Banach thì tích của hai hàm có thể không xác định được trừ khi range của nó là một đại số. Tuy nhiên, ta vẫn có thể thiết lập một quy tắc tổng quát cho đạo hàm của hàm tích. Cho f, g là hai hàm khả vi từ X vào Y_1, Y_2 tương ứng. Xét B là một ánh xạ song tuyến tính liên tục từ $Y_1 \times Y_2$ vào Z. Gọi φ là ánh xạ từ X đến Z được định nghĩa bởi $\varphi(x) = B(f(x), g(x))$. Khi đó, với mọi u, v trong X

$$D\varphi(u)(v) = B(Df(u)(v), g(u)) + B(f(u), Dg(u)(v)).$$

Đây là quy tắc của đạo hàm tích. Xét trường hợp đặc biệt là $Y_1 = Y_2 = \mathcal{L}(Y)$ - đại số các toán tử bị chặn trong không gian Banach Y. Khi đó $\varphi(x) = f(x)g(x)$ là tích thông thường của hai toán tử. Quy tắc đạo hàm tích là

$$D\varphi(u)(v) = [Df(u)(v)] \cdot g(u) + f(u) \cdot [Dg(u)(v)]$$

Đạo hàm Fretchet cấp cao được đồng nhất với ánh xạ đa tuyến tính. Cho f là một ánh xạ khả vi đi từ X vào Y. Tại mỗi điểm u, đạo hàm $Df(u)$ là một phần tử của không gian Banach $\mathcal{L}(X, Y)$. Do đó ta có ánh xạ Df từ X vào $\mathcal{L}(X, Y)$, xác định bởi $Df : u \to Df(u)$. Nếu ánh xạ này khả vi tại điểm u, ta nói rằng f khả vi đến cấp hai tại u. Đạo hàm của ánh xạ Df tại u được gọi là đạo hàm cấp hai của f tại u. Ký hiệu là $D^2f(u)$. Đây là một phần tử của không gian $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$. Gọi $\mathcal{L}_2(X, Y)$ là không gian các ánh xạ song tuyến tính bị chặn từ $X \times X$ vào Y. Phần tử của không gian này là các ánh xạ f từ $X \times X$ vào Y mà tuyến tính theo cả hai biến, đồng thời tồn tại hằng số c sao cho

$$\|f(x_1, x_2)\| \leq c \|x_1\| \|x_2\|$$

với mọi $x_1, x_2 \in X$. Infimum của các số c như vậy ký hiệu là $\|f\|$. Đây là một chuẩn trên không gian $\mathcal{L}_2(X, Y)$, và không gian này trở thành không gian định chuẩn với chuẩn như trên. Nếu φ là một phần tử của $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$, ta đặt

$$\tilde{\varphi}(x_1, x_2) = [\varphi(x_1)](x_2) \text{ for } x_1, x_2 \in X.$$

Khi đó $\tilde{\varphi} \in \mathcal{L}_2(X, Y)$. Ta thấy rằng ánh xạ $\varphi \to \tilde{\varphi}$ là một đẳng cự. Như vậy đạo hàm cấp hai của một ánh xạ khả vi cấp hai f từ X vào Y có thể được xem như một ánh xạ song tuyến tính từ $X \times X$ vào Y. Dễ thấy rằng ánh xạ này đối xứng theo hai biến, tức là

$$D^2f(u)(v_1, v_2) = D^2f(u)(v_2, v_1)$$

với mọi u, v_1, v_2. Đạo hàm cấp cao được định bằng cách lặp lại quy trình trên. Đạo hàm cấp p của ánh xạ f từ X vào Y được đồng nhất với ánh xạ p-tuyến tính từ không gian $X \times X \times \cdots \times X$ (p lần) vào Y. Một cách thuận tiện để tính đạo hàm cấp p của f là công thức sau

$$D^p f(u)(v_1, \ldots, v_p) = \left.\frac{\partial^p}{\partial t_1 \cdots \partial t_p}\right|_{t_1 = \cdots = t_p = 0} f(u + t_1 v_1 + \cdots + t_p v_p).$$

Trong sự liên hệ với ngành kĩ thuật điện, Anderson và Duffin [3] định nghĩa *tổng song song* của hai ma trận xác định dương A và B bởi

$$A : B = \left(A^{-1} + B^{-1}\right)^{-1}.$$

Trung bình điều hòa $2(A:B)$ là đối ngẫu của *trung bình cộng* $A\nabla B = \dfrac{A+B}{2}$. Cũng trong khoảng thời gian này, Pusz và Woronowicz [69] giới thiệu *trung bình nhân* là

$$A\sharp B := A^{1/2}\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)^{1/2}A^{1/2}.$$

Họ chứng minh rằng trung bình nhân là nghiệm xác định dương duy nhất của phương trình Riccati

$$XA^{-1}X = B.$$

Vào năm 2005, Moakher [65] và sau đó là vào năm 2006, Bhatia và Holbrook [14] nghiên cứu cấu trúc của đa tạp Riemannian $\mathbb{H}_n^+$. Họ chỉ ra rằng đường cong

$$\gamma(t) = A\sharp_t B = A^{1/2}\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)^t A^{1/2} \quad (t \in [0,1])$$

là đường trắc địa duy nhất nối A và B và gọi là t-trung bình nhân hay trung bình nhân có trọng. Trung bình điều hòa có trọng và trung bình cộng có trọng được định nghĩa bởi

$$A!_t B = \left(tA^{-1} + (1-t)B^{-1}\right)^{-1},$$

and

$$A\nabla_t B = tA + (1-t)B.$$

Bất đẳng thức về sự liên hệ giữa ba trung bình trên là bất đẳng thức trung bình điều hòa, trung bình nhân và trung bình cộng [47, 60]

$$A!_t B \le A\sharp_t B \le A\nabla_t B.$$

Ba trung bình trên đều là trung bình Kubo-Ando. Chúng ta sẽ nhắc sơ lược về lý thuyết trung bình Kubo-Ando [54] tổng quát ở đây. Với $x > 0$ và $t \ge 0$, hàm $\phi(x,t) = \dfrac{x(1+t)}{x+t}$ bị chặn và liên tục trên nửa đường thẳng thực mở rộng $[0,\infty]$. Lý thuyết Löwner ([9, 45]) về các hàm toán tử đơn điệu chỉ ra rằng ánh xạ $m \mapsto f$, xác định bởi

$$f(x) = \int_{[0,\infty]} \phi(x,t)dm(t), \text{ với } x > 0,$$

thiết lập một đẳng cấu affine giữa lớp các độ do Radon dương trên $[0,\infty]$ lên lớp các hàm toán tử đơn điệu. Trong biểu diễn trên, $f(0) = \inf_x f(x) = m(\{0\})$ and $\inf_x f(x)/x = m(\{\infty\})$.

Định lý 1.2.5. *[Kubo-Ando] Với mỗi phép nối tiếp σ, tồn tại duy nhất một hàm toán tử đơn điệu $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, thỏa mãn*

$$f(t)I_n = I_n\sigma(tI_n), t > 0,$$

và với $A, B > 0$ ta có

$$A\sigma B = A^{\frac{1}{2}}f(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})A^{\frac{1}{2}},$$

trong đó vế phải của đẳng thức trên được hiểu theo nghĩa của giải tích hàm và được mở rộng cho $A, B \ge 0$ bằng cách

$$A\sigma B = \lim_{\epsilon\to 0}(A+\epsilon I_n)\sigma(B+\epsilon I_n).$$

Ta gọi f là hàm biểu diễn của σ.

Định lý tiếp theo được suy ra từ biểu diễn tích phân của hàm ma trận đơn điệu và định lý trên.

Định lý 1.2.6. *Ánh xạ $m \mapsto \sigma$, xác định bởi*

$$A\sigma B = aA + bB + \int_{(0,\infty)} \frac{1+t}{t}\{(tA) : B\}dm(t)$$

trong đó

$$a = m(\{0\}) \text{ và } b = m(\{\infty\}),$$

thiết lập một đẳng cấu affine từ lớp các độ đo Radon dương trên $[0,\infty]$ vào lớp các phép nối tiếp.

Nếu P và Q là hai phép chiếu thì công thức cho $P\sigma Q$ đơn giản hơn.

Định lý 1.2.7. *Cho trung bình σ. Khi đó với hai phép chiếu P và Q, ta có*

$$P\sigma Q = a(P - P\wedge Q) + b(Q - P\wedge Q) + P\wedge Q,$$

trong đó

$$a = 1\sigma 0 \quad \text{và} \quad b = \lim_{x\to\infty}(1\sigma x)/x.$$

Một hệ quả tức thì của định lý trên là

$$P!Q = P\wedge Q \quad \text{và} \quad P\#Q = P\wedge Q.$$

Cho f là hàm biểu diễn của σ. Vì $xf(x^{-1})$ là hàm biểu diễn của trung bình chuyển vị σ' nên σ đối xứng nếu và chỉ nếu $f(x) = xf\left(x^{-1}\right)$. Định lý tiếp theo cho ta sự biểu diễn tổng quát của phép nối tiếp đối xứng.

Định lý 1.2.8. *Ánh xạ $n \mapsto \sigma$, xác định bởi*

$$A\sigma B = \frac{c}{2}(A+B) + \int_{(0,1]} \frac{1+t}{2t}\{(tA) : B + A : (tB)\}dn(t),$$

trong đó $c = n(\{0\})$, thiết lập một đẳng cấu affine từ lớp các độ đo Radon dương trên đoạn $[0,1]$ lên lớp các phép nối tiếp đối xứng.

Chương 2

Khoảng cách Hellinger có trọng

Trong những năm gần đây, các nhà nghiên cứu quan tâm nhiều đến các khoảng cách xác định trên tập các ma trận xác định dương $\mathbb{P}_n$ Cùng với khoảng cách cổ điển là khoảng cách Riemannian $d_R(A,B) = \left(\sum_{i=1}^{n} \log^2 \lambda_i(A^{-1}B)\right)^{1/2}$ (trong đó $\lambda_i(A^{-1}B)$ là các giá trị riêng của ma trận $A^{-1/2}BA^{-1/2}$), còn nhiều loại khoảng cách quan trọng khác. Hai trong số các khoảng cách đó là khoảng cách Bures-Wasserstein, xuất hiện trong lý thuyết tối ưu vận tải [13]:

$$d_b(A,B) = \left(\operatorname{Tr}(A+B) - 2\operatorname{Tr}((A^{1/2}BA^{1/2})^{1/2})\right)^{1/2},$$

và khoảng cách Hellinger hay khoảng cách Bhattacharya trong lý thuyết thông tin lượng tử [75]:

$$d_h(A,B) = \left(\operatorname{Tr}(A+B) - 2\operatorname{Tr}(A^{1/2}B^{1/2})\right)^{1/2}.$$

Chú ý là khoảng cách d_h chính là khoảng cách Euclidean giữa $A^{1/2}$ và $B^{1/2}$, tức là, $\|A^{1/2} - B^{1/2}\|_F$.

Gần đây, Ha [43] giới thiệu khoảng cách Alpha Procrustes xác định bởi: Với $\alpha > 0$ và hai ma trận nửa xác định dương A và B,

$$d_{b,\alpha} = \frac{1}{\alpha} d_b(A^{2\alpha}, B^{2\alpha}).$$

Ông đã chứng minh rằng các khoảng cách Alpha Procrustes là các khoảng cách Riemann tương ứng với một họ các metric Riemann trên không gian các ma trận xác định dương, bao gồm cả các metric Riemann Log-Euclidean và Wasserstein. Vì khoảng cách Alpha Procrustes được định nghĩa dựa trên khoảng cách the Bures-Wasserstein, nên ta cũng gọi nó là *khoảng cách Bures-Wasserstein có trọng*. Theo cách như trên, trong chương này chúng tôi định nghĩa *khoảng cách Hellinger có trọng* cho hai ma trận nửa xác định dương bởi

$$d_{h,\alpha}(A,B) = \frac{1}{\alpha} d_h(A^{2\alpha}, B^{2\alpha}),$$

sau đó nghiên cứu các tính chất của nó.

Các kết quả trong chương này được lấy từ [32].

2.1 Khoảng cách Hellinger có trọng

Định nghĩa 2.1.1. Với hai ma trận nửa xác định dương A, B và với $\alpha > 0$, khoảng cách Hellinger có trọng giữa A và B được định nghĩa bởi

$$d_{h,\alpha}(A, B) = \frac{1}{\alpha} d_h(A^{2\alpha}, B^{2\alpha}) = \frac{1}{\alpha}(\operatorname{Tr}(A^{2\alpha} + B^{2\alpha}) - 2\operatorname{Tr}(A^\alpha B^\alpha))^{\frac{1}{2}}.$$

Mệnh đề 2.1.1. *Với hai ma trận nửa xác định dương A và B,*

$$\lim_{\alpha \to 0} d^2_{h,\alpha}(A, B) = ||\log(A) - \log(B)||^2_F.$$

Mệnh đề 2.1.2. *Với hai ma trận nửa xác định dương A và B, ta có*

$$d_{b,\alpha}(A, B) \leq d_{h,\alpha}(A, B) \leq \sqrt{2} d_{b,\alpha}(A, B).$$

2.2 Tính chất điểm giữa

Vào năm 2016, Audenaert [5] giới thiệu tính chất *điểm giữa* của các trung bình ma trận. Ta nói trung bình σ thỏa mãn tính điểm giữa ứng với khoảng cách d nếu với mỗi cặp ma trận xác định dương A và B,

$$d(A, A\sigma B) \leq d(A, B).$$

Trong tài liệu [34], các tác giả giới thiệu và nghiên cứu tính chất *trong hình cầu* của các trung bình ma trận. Dinh, Franco và Dumitru cũng đã công bố một số công trình về các tính chất hình học này [26, 28] cho trung bình lũy thừa $\mu_p(t; A, B) := (tA^p + (1-t)B^p)^{1/p}$ ứng với các khoảng cách khác nhau. Họ cũng đã xét trường hợp trung bình lũy thừa Kubo-Ando [54] được định nghĩa bởi

$$P_p(t, A, B) = A^{1/2}\left(tI + (1-t)(A^{-1/2}BA^{-1/2})^p\right)^{1/p} A^{1/2}.$$

Trong mục này, chúng tôi tập trung nghiên cứu tính điểm giữa của trung bình lũy thừa ứng với các khoảng cách Bures-Wasserstein có trọng và khoảng cách Hellinger có trọng. Bằng cách sử dụng các tính chất lồi, lõm của hàm mũ, ngoài việc chứng minh trung bình lũy thừa thỏa mãn tính chất điểm giữa ứng với $d_{h,\alpha}$ (Định lý 2.2.1) và $d_{b,\alpha}$ (Định lý 2.2.2), chúng tôi cũng chứng minh rằng trong số các trung bình đối xứng, trung bình cộng là trung bình duy nhất thỏa mãn tính chất điểm giữa ứng khoảng cách Bures-Wasserstein có trọng và khoảng cách Hellinger có trọng.

Định lý 2.2.1. *Với $0 < p/2 \leq \alpha \leq p$ và $0 \leq t \leq 1$. Ta có*

$$d_{h,\alpha}(A, \mu_p(t; A, B)) \leq d_{h,\alpha}(A, B),$$

với mọi $A, B \in \mathbb{P}_n$.

Định lý 2.2.2. *Với* $0 < p/2 \leq \alpha \leq p$ *và* $1/2 \leq t \leq 1$*. Ta có*

$$d_{b,\alpha}(A, \mu_p(t; A, B)) \leq d_{b,\alpha}(A, B),$$

với mọi $A, B \in \mathbb{P}_n$*.*

Trong [28, Định lý 2] các tác giả chứng minh rằng trung bình lũy thừa Kubo-Ando $P_p(t, A, B)$ thỏa tính chất điểm giữa dựa vào sự kiện hàm $g(t) = \mathrm{Tr}(A^{1/2}P_p(t; A, B)^{1/2})$ là hàm lõm. Để ý là $P_t(A, B) \neq P_t(B, A)$, tức là P_t không đối xứng. Tuy nhiên, với các trung bình ma trận đối xứng thì ta có kết quả sau mà chứng minh của nó được dựa vào [22].

Định lý 2.2.3. *Cho* σ *là một trung bình đối xứng và giả sử rằng một trong hai bất đẳng thức sau xảy ra với mỗi cặp ma trận xác định dương* A, B *bất kì:*

$$d_{h,\alpha}(A, A\sigma B) \leq d_{h,\alpha}(A, B) \tag{2.1}$$

hoặc

$$d_{b,\alpha}(A, A\sigma B) \leq d_{b,\alpha}(A, B). \tag{2.2}$$

Khi đó σ *chỉ có thể là trung bình cộng.*

Trong chương này, chúng tôi giới thiệu một khoảng cách mới được gọi là khoảng cách Hellinger có trọng và nghiên cứu các tính chất của nó. Khoảng cách này được xây dựng dựa trên phương pháp của Minh khi ông xây dựng khoảng cách Bures có trọng số. Khoảng cách Bures có trọng là một phiên bản mở rộng với một tham số của khoảng cách Bures. Trong chương tiếp theo, chúng tôi giới thiệu một phân kỳ lượng tử mới được gọi là phân kỳ α-z-Bures Wasserstein, được coi là một phiên bản mở rộng với hai tham số của khoảng cách Bures.

Chương 3

Phân kỳ α-z-Bures Wasserstein

Ta biết rằng trên đa tạp Riemannian các ma trận xác định dương, trung bình nhân

$$A\sharp_t B = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^t A^{1/2}$$

là đường trắc địa duy nhất nối A và B, trong đó $A, B \in \mathbb{P}_n$. Với $t = 1/2$, $A\sharp_{1/2}B$ trung bình nhân của A và B. Rõ ràng rằng $A\sharp_{1/2}B$ là một sự tổng quát lên ma trận của trung bình nhân $\sqrt{ab}$ của các số dương a và b. Vào năm 2004, Moakher [65] và sau đó là Bhatia vàHolbrook [14] nghiên cứu bài toán tổng bình phương bé nhất

$$\min_{X>0} \sum_{i=1}^{m} \delta_2^2(X, A_i), \tag{3.1}$$

trong đó $A_1, A_2, \cdots, A_m$ là các ma trận xác định dương và $\delta_2(A, B) = ||\log(A^{-1}B)||_2$ là khoảng cách Riemannian giữa A và B. Họ chỉ ra rằng phương trình (3.1) có một nghiệm xác định dương duy nhất gọi là trung bình Karcher của $A_1, A_2, \cdots, A_m$. Trong một số tài liệu, trung bình này còn có các tên gọi khác nhau như trung bình Fréchet, trung bình Cartan hay trọng tâm Riemannian. Hơn nữa nghiệm của phương trình (3.1) cũng là nghiệm xác định dương duy nhất của phương trình Karcher

$$\sum_{i=1}^{m} \log(X^{1/2}A_iX^{1/2}) = 0. \tag{3.2}$$

Trong [60], Lim và Palfia chỉ ra rằng nghiệm của phương trình (3.2) chính là nghiệm của phương trình ma trận sau khi $t \to 0$,

$$X = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} X\sharp_t A_i. \tag{3.3}$$

Gần đây, Franco và Dumitru [38] giới thiệu đại lượng gọi là trung bình lũy thừa Rényi của các ma trận. Cụ thể hơn, với $0 < \alpha_i \leq z_i \leq 1$ và với các ma trận xác định dương A_i, B_i, sử dụng các tiếp cận trong [60] được phát triển bởi Lim và Pálfia, họ chứng minh rằng phương trình ma trận

$$X = \sum_{i=1}^{m} \omega_i P_{\alpha_i, z_i}(X, A_i) \tag{3.4}$$

có một nghiệm xác định dương duy nhất, trong đó (ω_i) là vector xác suất và $P_{\alpha,z}(A,B) = (B^{\frac{1-\alpha}{2z}} A^{\frac{\alpha}{z}} B^{\frac{1-\alpha}{2z}})^z$ là hàm ma trận xuất hiện khi Audenaert và Datta [7] dùng để định nghĩa α-z-Renyi entropy tương đối vào năm 2015.

Để ý là trong phương trình (3.4) nếu ta thay $P_{\alpha_i,z_i}(X, A_i)$ bởi trung bình nhân $X\sharp_t A_i$, nghiệm tương ứng của phương trình ma trận này chính là trung bình lũy thừa. Bây giờ, nếu ta thay khoảng cách trong phương trình (3.1) nghiệm của bài toán này sẽ khác, nếu nó tồn tại. Thú vị thay, trong các ứng dụng, người ta đôi khi quan tâm đến các hàm tương tự hàm khoảng cách miễn sao nó có thể phân biệt được cho ta hai điểm dữ liệu. Các hàm này không nhất thiết đối xứng, không cần phải thỏa mãn bất đẳng thức tam giác. Các phân kỳ là các hàm như vậy. Một ví dụ quan trọng về phân kỳ là phân kỳ Bures-Wasserstein được nghiên cứu bởi Bhatia và các cộng sự [13], được định nghĩa như sau:

$$d_b(A,B) = (\mathrm{Tr}((A+B)/2) - \mathrm{Tr}(A^{1/2}BA^{1/2})^{1/2})^{1/2},$$

trong đó $\mathrm{Tr}((A^{1/2}BA^{1/2})^{1/2})$ là độ chính xác lượng tử giữa hai ma trận xác định dương A và B. Các tác giả chứng minh rằng d_b^2 là một phân kỳ lượng tử và giải bài toán tổng bình phương bé nhất ứng với phân kỳ Bures-Wasserstein. Trong công trình khác [14], họ đã giới thiệu phân kỳ Bures-Wasserstein có trọng được định nghĩa bởi

$$d_{b,t}(A,B) = (\mathrm{Tr}((1-t)A + tB) - \mathrm{Tr}(F_t(A,B))^{1/2},$$

trong đó $F_t(A,B) = \mathrm{Tr}(A^{\frac{1-t}{2t}} B A^{\frac{1-t}{2t}})^t$ được gọi là *tựa entropy tương đối nhiều lớp* [59, 79]. Họ cũng đã giải bài toán tổng bình phương bé nhất ứng với phân kỳ này. Để ý là $(A^{1/2}BA^{1/2})^{1/2}$ và $(A^{\frac{1-t}{2t}} B A^{\frac{1-t}{2t}})^t$ cũng chính là các phiên bản mở rộng lên cho ma trận của trung bình nhân $\sqrt{ab}$ và trung bình nhân có trọng $a^{1-t}b^t$ của hai số dương a và b, tương ứng.

Được thúc đẩy bởi các nghiên cứu được đề cập ở trên, trong chương này, chúng tôi giới thiệu và nghiên cứu các tính chất khác nhau của phân kỳ α-z-Bures Wasserstein được định nghĩa như sau:

$$\Phi(A,B) = \mathrm{Tr}((1-\alpha)A + \alpha B) - \mathrm{Tr}(Q_{\alpha,z}(A,B)), \tag{3.5}$$

trong đó A và B là các ma trận xác định dương, và $Q_{\alpha,z}(A,B) = P_{\alpha,z}(B,A)$. Rõ ràng là $Q_{\alpha,z}(A,B)$ cũng là một phiên bản ma trận tham số hóa của trung bình nhân có trọng số $a^{1-\alpha}b^\alpha$.

Các kết quả của chương này được lấy từ [30, 31, 32, 77].

3.1 Phân kỳ α-z-Bures Wasserstein và bài toán tổng bình phương bé nhất

Định nghĩa 3.1.1. ([11]) Một hàm trơn $\Phi : \mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n \to \mathbb{R}^+$ được gọi là *phân kỳ lượng tử* nếu

(i) $\Phi(A,B) = 0$ nếu và chỉ nếu $A = B$.

(ii) Đạo hàm cấp một $D\Phi$ theo biến thứ hai triệt tiêu trên đường chéo, tức là

$$D\Phi(A,X)|_{X=A}=0.$$

(iii) Đạo hàm cấp hai $D^2\Phi$ không âm trên đường chéo, tức là

$$D^2\Phi(A,X)|_{X=A}(Y,Y)\geq 0 \quad \text{với mọi ma trận Hermitian } Y.$$

Định lý 3.1.1. *Với $0\leq\alpha\leq z\leq 1$. Đại lượng*

$$\Phi(X,Y)=\operatorname{Tr}((1-\alpha)X+\alpha Y)-\operatorname{Tr}(Q_{\alpha,z}(X,Y)) \quad (X,Y>0)$$

là một phân kỳ.

Chúng tôi cũng giải bài toán tổng bình phương bé nhất ứng với $\Phi(A,B)$ và chỉ ra rằng nghiệm của bài toán này cũng chính là nghiệm xác định dương duy nhất của phương trình ma trận $\sum_{i=1}^{m} w_iQ_{\alpha,z}(X,A_i)=X$.

Định lý 3.1.2. *Với $0\leq\alpha\leq z\leq 1$, hàm*

$$F(X)=\sum_{i=1}^{m}\omega_i\Phi(A_i,X)$$

đạt giá trị nhỏ nhất tại X_0, trong đó X_0 là nghiệm xác định dương duy nhất của phương trình ma trận

$$\sum_{i=1}^{m} w_iQ_{\alpha,z}(X,A_i)=X.$$

Trong [49], M. Jeong và cộng sự đã nghiên cứu nghiệm này và ký hiệu nghiệm này là $\mathcal{R}_{\alpha,z}(\omega,\mathbb{A})$ và gọi là trung bình α-z có trọng bên phải. Sau đó chúng tôi tiếp tục nghiên cứu đại lượng này và đạt được nhiều kết quả mới.

Định lý 3.1.3. *Với $0\leq\alpha\leq z\leq 1, \alpha\neq 1, z\neq 0$. Đặt $\mathbb{A}=(A_1,...,A_m)$ là một bộ m ma trận xác định dương, và $\omega=(w_1,...,w_m)$ là một vector xác suất. Ta có*

$$\frac{1+z-\alpha}{1-\alpha}I-\frac{z}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{m}w_jA_j^{-\frac{1-\alpha}{z}}\leq\mathcal{R}_{\alpha,z}(\omega,\mathbb{A})\leq\Big(\frac{1+z-\alpha}{1-\alpha}I-\frac{z}{1-\alpha}\sum_{j=1}^{m}w_jA_j^{\frac{1-\alpha}{z}}\Big)^{-1}.$$

Bất đẳng thức thứ hai xảy ra khi $(1+z-\alpha)I-z\sum_{j=1}^{m}w_jA_j^{\frac{1-\alpha}{z}}$ khả nghịch.

Hwang và Kim [48] mọi m-trung bình có trọng $\mathcal{G}_m$ nằm giữa trung bình cộng và trung bình nhân, hàm $\mathcal{G}_m^{\omega}:=\mathcal{G}_m(\omega,\cdot):\mathbb{P}^m\to\mathbb{P}$ khả vi tại $\mathbb{I}=(I,...,I)$ và

$$D\mathcal{G}_n^{\omega}(\mathbb{I})(X_1,...,X_m)=\sum_{j=1}^{m}w_jX_j.$$

Chú ý rằng trung bình α-z có trọng bên phải không thỏa mãn điều kiện ở trên. Tuy nhiên, ta vẫn có kết quả tương tự như sau.

Định lý 3.1.4. *Với $\omega = (w_1, ..., w_m)$ là một vector xác suất và đặt $\mathcal{R}^{\omega}_{\alpha,z} := \mathcal{R}_{\alpha,z}(\omega, \cdot) : \mathbb{P}_n^m \longrightarrow \mathbb{P}_n$. Khi đó $\mathcal{R}^{\omega}_{\alpha,z}$ khả vi tại $\mathbb{I} = (I, ..., I)$, và*

$$D\mathcal{R}^{\omega}_{\alpha,z}(\mathbb{I})(X_1, ..., X_m) = \sum_{j=1}^{m} w_j X_j.$$

Cuối cùng, chúng tôi chứng minh $\mathcal{R}_{\alpha,z}(\omega, \mathbb{A})$ thỏa là trung bình Lie-Trotter nhiều biến.

Định lý 3.1.5. *Đại lượng $\mathcal{R}_{\alpha,z}(\omega, \mathbb{A})$ là trung bình Lie-Trotter nhiều biến, nghĩa là, với mọi vector xác suất $\omega = (w_1, w_2, ., w_m)$, ta có*

$$\lim_{s\to 0} \mathcal{R}_{\alpha,z}(\omega, \gamma_1(s), ..., \gamma_m(s))^{1/s} = \exp\Big(\sum_{j=1}^{m} w_j \gamma_j'(0)\Big),$$

với $\varepsilon > 0$ và $\gamma_j : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{P}_n$ là các đường cong khả vi và $\gamma_j(0) = I$, với mọi $j = 1, 2, ..., m$.

3.2 Bất đẳng thức xử lý dữ liệu và tính chất điểm giữa

Trong phần này, chúng tôi chứng minh phân kỳ này thỏa mãn bất đẳng thức xử lý dữ liệu (DPI) trong lý thuyết thông tin lượng tử. Bất đẳng thức xử lý dữ liệu là một khái niệm liên quan đến lý thuyết thông tin, nó khẳng định rằng nội dung thông tin của một tín hiệu không thể được tăng lên thông qua một phép toán vật lý cục bộ. Điều này có thể được diễn đạt một cách ngắn gọn như "sau xử lý không thể tăng thông tin", tức là, đối với mọi phép ánh xạ hoàn toàn dương bảo toàn vết $\mathcal{E}$ và mọi ma trận xác định dương dương A và B,

$$\Phi(\mathcal{E}(A), \mathcal{E}(B)) \leq \Phi(A, B).$$

Ngoài ra, chúng tôi còn chỉ ra rằng trung bình lũy thừa $\mu(t, A, B) = ((1-t)A^p + tB^p)^{1/p}$ thỏa mãn tính chất điểm giữa ứng với phân kỳ α-z-Bures Wasserstein.

Định lý 3.2.1. *Với $A, B \in \mathbb{P}_n, 0 < \alpha \leq z \leq 1, 1/2 \leq p \leq 1$ và $\alpha \leq zp$. Khi đó với mọi ma trận xác định dương A và B, ta có*

$$\Phi(A, \mu_p) \leq \Phi(A, B).$$

3.3 Độ chính xác lượng tử và các phiên bản tham số hóa

Độ chính xác lượng tử là một đại lượng quan trọng trong lý thuyết thông tin lượng tử và lý thuyết hỗn độn lượng tử. Nó dùng để đo khoảng cách giữa các ma trận mật độ, được coi là các trạng thái lượng tử. Mặc dù nó không phải là một metric, tuy nhiên nó có nhiều tính chất hữu ích có thể dùng để định nghĩa một metric trên không gian các ma trận mật độ. Trong phần này chúng tôi sẽ trình bày một số tính chất của độ chính xác lượng tử và một số phiên bản mở rộng của nó. Một kết quả quan trọng đó là chúng tôi đưa ra một công thức biểu diễn cho độ chính xác lượng tử α-z

$$f_{\alpha,z}(\rho,\sigma) := \operatorname{Tr}\left(\rho^{\alpha/2z}\sigma^{(1-\alpha)/z}\rho^{\alpha/2z}\right)^z = \operatorname{Tr}\left(\sigma^{(1-\alpha)/2z}\rho^{\alpha/z}\sigma^{(1-\alpha)/2z}\right)^z,$$

trong đó ρ và σ là các ma trận xác định dương. Cụ thể hơn, nó là cực tiểu của các hàm ma trận

$$P(X) = z\operatorname{Tr}\left(\sigma^{\frac{z-\alpha}{2z}}\rho^{\frac{\alpha}{z}}\sigma^{\frac{z-\alpha}{2z}}X\right) - (z-1)\operatorname{Tr}\left(\sigma^{\frac{z-1}{2z}}X\sigma^{\frac{z-1}{2z}}\right)^{\frac{z}{z-1}},$$

và

$$Q(X) = \left(\operatorname{Tr}(\sigma^{\frac{z-\alpha}{2z}}\rho^{\frac{\alpha}{z}}\sigma^{\frac{z-\alpha}{2z}}X)\right)^z.\left(\operatorname{Tr}(\sigma^{\frac{z-1}{2z}}X\sigma^{\frac{z-1}{2x}})^{\frac{z}{z-1}}\right)^{1-z}.$$

Định lý 3.3.4. *Cho ρ,σ là các ma trận xác định dương và $0<\alpha<z<1$. Ta có*

(i) $f_{\alpha,z}(\rho,\sigma) = \min_{X>0} P(X)$.

(ii) $f_{\alpha,z}(\rho,\sigma) = \min_{X>0} Q(X)$.

Hơn nữa, giá trị nhỏ nhất này đạt được tại $X_0 = \sigma^{\frac{1-z}{2z}}(\sigma^{\frac{1-\alpha}{2z}}\rho^{\frac{\alpha}{z}}\sigma^{\frac{1-\alpha}{2z}})^{z-1}\sigma^{\frac{1-z}{2z}}$.

3.4 Độ chính xác α-z giữa các quỹ đạo unita

Trong phần cuối của chương này, chúng tôi sử dụng $f_{\alpha,z}$ để đo khoảng cách giữa hai quỹ đạo unita và chứng minh rằng tập các khoảng cách này chính là một khoảng đóng trong $\mathbb{R}^+$.

Định lý 3.4.2. *Với $\rho,\sigma\in\mathcal{D}_n$, độ chính xác α-z, $f_{\alpha,z}(\rho,\sigma)=\operatorname{Tr}\left(\sigma^{\frac{1-\alpha}{2z}}\rho^{\frac{\alpha}{z}}\sigma^{\frac{1-\alpha}{2z}}\right)^z$ giữa hai quỹ đạo unita U_ρ và U_σ thỏa mãn*

$$\max_{U\in U(\mathbb{H})} f_{\alpha,z}(\rho, U\sigma U^*) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{\downarrow}(\rho)^\alpha\lambda_i^{\downarrow}(\sigma)^{1-\alpha},$$

và

$$\min_{U\in U(\mathbb{H})} f_{\alpha,z}(\rho, U\sigma U^*) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{\downarrow}(\rho)^\alpha\lambda_i^{\uparrow}(\sigma)^{1-\alpha},$$

trong đó $\lambda(\rho)=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ là các giá trị riêng của ρ và $\lambda^{\downarrow}(\rho)$ (tương ứng $\lambda^{\uparrow}(\rho)$) ký hiệu cho việc các giá trị riêng $\lambda(\rho)$ được sắp xếp giảm dần (tương ứng tăng dần).

Định lý 3.4.3. *Với $0\le\alpha\le z\le 1$,*

$$\{f_{\alpha,z}(\rho,U\sigma U^*) : U\in U(\mathbb{H})\} = \Big[\sum_{i=1}^n \lambda_i^{\downarrow}(\rho)^\alpha\lambda_i^{\uparrow}(\sigma)^{1-\alpha}, \sum_{i=1}^n \lambda_i^{\downarrow}(\rho)^\alpha\lambda_i^{\downarrow}(\sigma)^{1-\alpha}\Big].$$

Trong chương này, chúng tôi giới thiệu một phân kỳ lượng tử mới được gọi là phân kỳ α-z-Bures Wasserstein, đây là một sự mở rộng có hai tham số của khoảng cách Bures. Sau đó, chúng tôi nghiên cứu các tính chất của nó. Cụ thể, chúng tôi giải quyết bài toán tổng bình phương bé nhất liên quan đến phân kỳ này và nghiên cứu tính chất nghiệm của nó. Trong chương tiếp theo, chúng tôi giới thiệu một trung bình nhân dạng phổ có trọng số mới được ký hiệu là $\mathcal{F}_t(A,B)$ và nghiên cứu các tính chất của đại lượng này. Ngoài ra, chúng tôi đưa ra một số so sánh giữa $\mathcal{F}_t(A,B)$ và $A \diamond_t B$, đó là nghiệm của bài toán tổng bình phương bé nhất ứng với khoảng cách Bures Wasserstein.

Chương 4

Một trung bình nhân dạng phổ có trọng số mới

Ta biết rằng trung bình nhân [10] $A\sharp B$ là trung điểm của đường trắc địa

$$A\sharp_t B = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^t A^{1/2}, \quad t \in [0,1],$$

nối A và B thông qua metric Riemannian $\delta_R(A,B) = \|\log(A^{-1/2}BA^{-1/2})\|_F$, trong đó $\|\cdot\|_F$ ký hiệu cho chuẩn Frobenius [11].

Trung bình nhân dạng phổ có trọng số của hai ma trận $A, B \in \mathbb{P}_n$ được giới thiệu bởi Fiedler và Pták vào năm 1997 [37], và công thức của nó là

$$A\natural B := (A^{-1}\sharp B)^{1/2} A (A^{-1}\sharp B)^{1/2}. \tag{4.1}$$

Đại lượng này được gọi là *trung bình nhân dạng phổ* bởi vì $(A\natural B)^2$ đồng dạng với AB và các giá trị riêng của nó chính là căn bậc hai của các giá trị riêng tương ứng của AB [37, Định lý 3.2].

Kim và Lee [52] định nghĩa trung bình nhân dạng phổ có trọng như sau:

$$A\natural_t B := \left(A^{-1}\sharp B\right)^t A \left(A^{-1}\sharp B\right)^t, \quad t \in [0,1]. \tag{4.2}$$

Rõ ràng $A\natural_t B$ là đường cong nối A và B. Họ nghiên cứu tính chất entropy tương đối liên quan đến trung bình nhân dạng phổ và một số tính chất tương tự entropy tương đối của toán tử Tsallis được định nghĩa thông qua trung bình nhân ma trận. Gầm đây, Gan, Liu, Tam [41] và Gan, Tam [40] đã nghiên cứu $A\natural_t B$ và thu được một số tính chất thú vị.

Lưu ý rằng trong (4.2), trung bình nhân $A^{-1}\sharp B$ là một thành phần chính của trung bình phổ có trọng số $A\natural_t B$ trong khi thành phần ở giữa là A, độc lập với t. Theo dòng sự kiện trên, trong chương này chúng tôi định nghĩa một dạng trung bình nhân dạng phổ có trọng số mới và gọi là trung bình F.

Các kết quả trong chương này được lấy từ [33].

4.1 Trung bình nhân dạng phổ có trọng số mới và các tính chất cơ bản

Định nghĩa 4.1.1. Với $A, B \in \mathbb{P}_n$. Định nghĩa

$$\mathcal{F}_t(A,B) := (A^{-1}\sharp_t B)^{1/2} A^{2-2t} (A^{-1}\sharp_t B)^{1/2}, \quad t \in [0,1]. \tag{4.3}$$

Dễ thấy $\mathcal{F}_0(A,B) = A$ và $\mathcal{F}_1(A,B) = B$, dẫn đến $\mathcal{F}_t(A,B)$ là đường cong nối A và B. Với $t = \frac{1}{2}$, $\mathcal{F}_{\frac{1}{2}}(A,B)$ là trung bình nhân dạng phổ (4.1). Ta gọi $\mathcal{F}_t(A,B)$ là trung bình $\mathcal{F}$ có trọng và rõ ràng là nó khác với (4.2).

Từ phương trình Riccati, ta thấy rằng $A\sharp X = B$ nếu và chỉ nếu $X = BA^{-1}B$. Do đó, $\mathcal{F}_t(A,B)$ là nghiệm xác định dương duy nhất của phương trình

$$A^{2(t-1)}\sharp X = (A^{-1}\sharp_t B)^{1/2}.$$

Mệnh đề 4.1.1. *Với $A, B \in \mathbb{P}_n$. Các tính chất xảy ra với mọi $t \in [0,1]$.*

1. $\mathcal{F}_t(A,B) = A^{1-t}B^t$ *nếu A và B giao hoán.*
2. $\mathcal{F}_t(aA, bB) = a^{1-t}b^t\mathcal{F}_t(A,B)$ *với $a, b > 0$.*
3. $U^*\mathcal{F}_t(A,B)U = \mathcal{F}_t(U^*AU, U^*BU)$ *với $U \in U(n)$.*
4. $\mathcal{F}_t^{-1}(A,B) = \mathcal{F}_t(A^{-1}, B^{-1})$.
5. $\det \mathcal{F}_t(A,B) = (\det A)^{1-t}(\det B)^t$.
6. $2((1-t)A + tB^{-1})^{-1/2} - A^{2(t-1)} \le \mathcal{F}_t(A,B) \le [2((1-t)A^{-1} + tB)^{-1/2} - A^{-2(t-1)}]^{-1}$.

4.2 Công thức Lie-Trotter và làm trội yếu-log

Định lý 4.2.1. *Với $A, B \in \mathbb{H}_n$ và $t \in [0,1]$. Khi đó*

$$\lim_{p\to 0} \mathcal{F}_t^{1/p}(e^{pA}, e^{pB}) = e^{(1-t)A+tB}.$$

Định lý 4.2.2. *Với $(\alpha_1, ..., \alpha_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$, và $X_1, X_2, ..., X_m \in \mathbb{H}_n$. Đường cong*

$$\gamma(t) := \mathcal{F}_{\alpha_{m-1}}\left(e^{tX_m}, \mathcal{F}_{\alpha_m-2}\left(e^{tX_{m-1}}, \mathcal{F}_{\alpha_m-3}(...\mathcal{F}_{\alpha_1}(e^{tX_2}, e^{tX_1})...\right)\right)$$

là đường cong khả vi với $\gamma(0) = I$ và

$$\gamma'(0) = \sum_{k=1}^{m}\prod_{i=k}^{m}\alpha_i\,(1-\alpha_{k-1})\,X_k,$$

trong đó $\alpha_0 = 0$ và $\alpha_m = 1$. Đặc biệt, nếu $\alpha_k = \dfrac{k}{k+1}$, với $k = 1, 2, ..., m-1$ thì $\gamma'(0) = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=1}^{m} X_k$.

Phần cuối của chương này, chúng tôi so sánh việc làm trội yếu-log giữa $\mathcal{F}$-mean và trung bình Wasserstein là nghiệm của bài toán tổng bình phương bé nhất ứng với khoảng cách Bures Wasserstein.

Định lý 4.2.3. *Với $A, B \in \mathbb{P}_n$ và $t \in [0,1]$.*

(i) Nếu $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ thì
$$\mathcal{F}_t(A,B) \prec_{w\log} A \diamond_t B;$$

(ii) Nếu $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ thì
$$\mathcal{F}_{1-t}(B,A) \prec_{w\log} A \diamond_t B.$$

Kết luận

Luận án này đạt được những kết quả chính sau:

1. Chúng tôi giới thiệu một khoảng cách Hellinger có trọng số mới, được ký hiệu là $d_{h,\alpha}(A,B)$, và chứng minh rằng nó là nó là một khoảng cách trung gian giữa khoảng cách Log-Euclidean và Hellinger. Bên cạnh đó, chúng tôi thiết lập sự tương đương giữa khoảng cách Bures-Wasserstein có trọng số và khoảng cách Hellinger có trọng số. Hơn nữa, chúng tôi chứng minh rằng cả hai khoảng cách đều thỏa mãn tính chất "điểm giữa". Ngoài ra, chúng tôi cũng chỉ ra rằng trong số các trung bình đối xứng, trung bình cộng là trung bình là duy nhất thỏa mãn tính chất "điểm giữa" ứng với các khoảng cách Bures-Wasserstein và Hellinger có trọng số.

2. Chúng tôi xây dựng một phân kỳ lượng tử mới được gọi là phân kỳ Bures-Wasserstein α-z và chứng minh rằng phân kỳ này thỏa mãn tính chất "điểm giữa" và bất đẳng thức xử lý dữ liệu trong lý thuyết thông tin lượng tử. Hơn nữa, chúng tôi giải bài toán tổng bình phương bé nhất liên quan đến phân kỳ này và chứng minh rằng nghiệm của bài toán này chính xác cũng là nghiệm xác định dương duy nhất của phương trình ma trận sau:

$$\sum_{i=1}^{m} w_i Q_{\alpha,z}(X, A_i) = X,$$

trong đó $Q_{\alpha,z}(A,B) = \left(A^{\frac{1-\alpha}{2z}} B^{\frac{\alpha}{z}} A^{\frac{1-\alpha}{2z}}\right)^{z}$ với $0 < \alpha \leq z \leq 1$. Sau đó, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu các tính chất nghiệm của bài toán trên và đạt được một số kết quả quan trọng. Ngoài ra, chúng tôi đưa ra một vài bất đẳng thức cho độ chính xác lượng tử và các phiên bản tham số hóa của nó. Sau đó, chúng tôi sử dụng độ chính xác lượng tử α-z để đo khoảng cách giữa hai quỹ đạo lượng tử.

3. Chúng tôi giới thiệu một trung bình nhân dạng phổ có trọng số mới, được gọi là trung bình $\mathcal{F}$. Chúng tôi xác lập một số tính chất cho trung bình F và chứng minh rằng nó thỏa mãn công thức Lie-Trotter. Hơn nữa, chúng tôi đưa ra một số so sánh về làm trội yếu-log giữa trung bình $\mathcal{F}$ và trung bình Wasserstein.

Những nghiên cứu tiếp theo

Trong tương lai, chúng tôi dự định nghiên cứu tiếp những hướng sau:

- Xây dựng những khoảng cách mới dựa trên các trung bình không phải Kubo-Ando.
- Xây dựng khoảng cách giữa các ma trận không cùng số chiều.
- Với $X, Y > 0$ và $0 < t < 1$, kiểm tra xem các đại lượng

  $$\Phi_1(X,Y) = \mathrm{Tr}((1-t)X + tY) - \mathrm{Tr}\left(X \natural_t Y\right)$$

  và

  $$\Phi_2(X,Y) = \mathrm{Tr}((1-t)X + tY) - \mathrm{Tr}\left(F_t(X,Y)\right)$$

  có phải là các phân kỳ lượng tử hay không đồng thời giải các bài toán liên quan.
- Đại lượng $\mathcal{F}_t(X,Y)$ là mới; do đó, chúng ta cần xác lập các tính chất mới cho đại lượng này đồng thời cũng so sánh nó với các trung bình đã biết trước đó.